ベクトル計算の基礎（2018 年 10 月 29 日）

1. $\mathbf{A} = (1,\ 3,\ 5),\ \mathbf{B} = (2,\ 4,\ 7)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。ついでに $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も計算せよ。
2. $\mathbf{A} = (1,\ 3,\ 5),\ \mathbf{B} = (2,\ 4,\ 7)$ のとき、$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}, \mathbf{B}\times\mathbf{A}$ を計算せよ。$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ とはどう違うか。
3. $\mathbf{A} = (1,\ 0,\ 0),\ \mathbf{B} = (0,\ 1,\ 0)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。あと $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も。
4. $\mathbf{A} = (10,\ 6,\ 5),\ \mathbf{B} = (10,\ 6,\ 5)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。それと $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も。
5. $\mathbf{A} = (-1,\ 5,\ 3),\ \mathbf{B} = (6,\ 7,\ -3)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。おまけに $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も。
6. $\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2},\ 4,\ -\frac{2}{3}\right),\ \mathbf{B} = \left(-2,\ \frac{2}{3},\ 2\right)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も。
7. $\mathbf{A} = \left(-6,\ -\frac{3}{5},\ 4\right),\ \mathbf{B} = \left(\frac{1}{4},\ -5,\ -\frac{3}{4}\right)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も。
8. $\mathbf{A} = (3a^2,\ 2b^2,\ -ab),\ \mathbf{B} = (ab,\ b^2,\ a^2)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。せっかくなので $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も。
9. $\mathbf{A} = (xyz,\ x^2,\ xz),\ \mathbf{B} = (y^2z,\ z^2,\ x^3)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。一応、$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も。
10. $\mathbf{A} = (\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2),\ \mathbf{B} = (-\sqrt{5},\ 3,\ \sqrt{2})$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。サービスで $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ も。
11. $\nabla f(x,\ y,\ z)$ を計算せよ。
    (a) $f(x,\ y,\ z) = xyz$
    (b) $f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$
    (c) $f(x,\ y,\ z) = x^3 + x^2 + x + 5$
    (d) $f(x,\ y,\ z) = xyz + xy^2z^3 + x^6y^2z$
    (e) $f(x,\ y,\ z) = 2x^3y^2 - x^2z^3 + 2y^3 - yz^3 + 6$
12. $\nabla\cdot\mathbf{A}, \nabla\times\mathbf{A}$ を計算せよ。
    (a) $\mathbf{A} = (x,\ y,\ z)$
    (b) $\mathbf{A} = (x^2,\ y^2,\ z^2)$
    (c) $\mathbf{A} = (x^2y^2z^2,\ x^2z^2,\ y^2)$
    (d) $\mathbf{A} = (3xy + yz^3,\ y + z^2 + 12,\ x^3 - 2y^4z)$
    (e) $\mathbf{A} = (xyz + y^2z,\ 5xz^2 + 3y - z^3,\ -x^3 + 3yz^2 + 2z^4)$
13. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ を示せ。
14. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$ を示せ。

- 生徒「先生、こんなことやって将来何の役に立つんですか？」
- 先生「こんなこともできない君達は将来何の役に立つんですか？」

とりあえずこれを計算しなさい

1. $\mathbf{A} = (1,\ 2,\ 3),\ \mathbf{B} = (4,\ 5,\ 6)$ のとき、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算せよ。わからんかったら下を読め。

2. $f(x,\ y,\ z) = 3x^2y^5z$ のとき、∇f を計算せよ。

3. $\mathbf{A} = (x^2y^3,\ yz^2,\ -x^2z^3)$ のとき、$\nabla\cdot\mathbf{A}$, $\nabla\times\mathbf{A}$ を計算せよ。

メモ：これができない物理系大学生は、分数ができない中学生に等しい。

$\mathbf{A} = (a_x,\ a_y,\ a_z),\ \mathbf{B} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$

- 内積（ $\cdot$ ）は、$x,\ y,\ z$ の各成分をそれぞれ掛けて足す。足すので答えはスカラー。
  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

- 外積（ $\times$ ）は、答えがベクトル。x 成分には、$y,\ z$ 成分をクロスさせて引いたものを入れる。
  なので、答えの x 成分には元の x 成分が入らない。$y,\ z$ 成分も同様。引く順番に注意。どうにかして覚えろ。
  $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (a_yb_z - a_zb_y,\ a_zb_x - a_xb_z,\ a_xb_y - a_yb_x)$

- ナブラ（ ∇ ）は演算子で、それだけでは意味を成さないベクトル。$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial}{\partial y}\,,\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$

  - スカラーに付くときは gradient（グラディエント：勾配）で、スカラーを $x,\ y,\ z$ のそれぞれで微分してベクトルにする。スカラーにしか付かないから、$\boldsymbol{f}$ やなくて、f なんやで。
    $\nabla f = \mathrm{grad}\ f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

  - ベクトルに内積で付くときは divergence（ダイバージェンス：発散）。内積なので各成分を掛けて足す。答えはスカラー。
    $\nabla\cdot\mathbf{A} = \mathrm{div}\ \mathbf{A} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$

  - ベクトルに外積で付くときは rotation または curl（ローテーション、またはカール：回転）。外積なので答えはベクトルやし、x 成分に x の文字はない。
    $\nabla\times\mathbf{A} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A} = \mathrm{curl}\ \mathbf{A} = \left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\,,\ \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)$