

ベクトル計算の基礎 (2019年10月21日)

- $\mathbf{A} = (1, 3, 5)$, $\mathbf{B} = (2, 4, 7)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。ついでに $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も計算せよ。
- $\mathbf{A} = (1, 3, 5)$, $\mathbf{B} = (2, 4, 7)$ のとき、 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ を計算せよ。 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とは違うか。
- $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。あと $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も。
- $\mathbf{A} = (10, 6, 5)$, $\mathbf{B} = (10, 6, 5)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。それと $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も。
- $\mathbf{A} = (-1, 5, 3)$, $\mathbf{B} = (6, 7, -3)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。おまけに $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も。
- $\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2}, 4, -\frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{B} = \left(-2, \frac{2}{3}, 2\right)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。 $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も。
- $\mathbf{A} = \left(-6, -\frac{3}{5}, 4\right)$, $\mathbf{B} = \left(\frac{1}{4}, -5, -\frac{3}{4}\right)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も。
- $\mathbf{A} = (3a^2, 2b^2, -ab)$, $\mathbf{B} = (ab, b^2, a^2)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。せっかくなので $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も。
- $\mathbf{A} = (xyz, x^2, xz)$, $\mathbf{B} = (y^2z, z^2, x^3)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。一応、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も。
- $\mathbf{A} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2)$, $\mathbf{B} = (-\sqrt{5}, 3, \sqrt{2})$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。サービスで $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ も。
- $\nabla f(x, y, z)$ を計算せよ。
 - $f(x, y, z) = xyz$
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 - $f(x, y, z) = x^3 + x^2 + x + 5$
 - $f(x, y, z) = xyz + xy^2z^3 + x^6y^2z$
 - $f(x, y, z) = 2x^3y^2 - x^2z^3 + 2y^3 - yz^3 + 6$
- $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。
 - $\mathbf{A} = (x, y, z)$
 - $\mathbf{A} = (x^2, y^2, z^2)$
 - $\mathbf{A} = (x^2y^2z^2, x^2z^2, y^2)$
 - $\mathbf{A} = (3xy + yz^3, y + z^2 + 12, x^3 - 2y^4z)$
 - $\mathbf{A} = (xyz + y^2z, 5xz^2 + 3y - z^3, -x^3 + 3yz^2 + 2z^4)$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ を示せ。
- $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ を示せ。

- 生徒「先生、こんなことやって将来何の役に立つんですか？」
- 先生「こんなこともできない君達は将来何の役に立つんですか？」

とりあえずこれを計算しなさい

1. $\mathbf{A} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{B} = (4, 5, 6)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。わからなかったら下を読め。

2. $f(x, y, z) = 3x^2y^5z$ のとき、 ∇f を計算せよ。

3. $\mathbf{A} = (x^2y^3, yz^2, -x^2z^3)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

メモ：これができない物理系大学生は、分数ができない中学生に等しい。

$$\mathbf{A} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{B} = (b_x, b_y, b_z)$$

- 内積 (\cdot) は、 x, y, z の各成分をそれぞれ掛けて足す。足すので答えはスカラー。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- 外積 (\times) は、答えがベクトル。 x 成分には、 y, z 成分をクロスさせて引いたものを入れる。
なので、答えの x 成分には元の x 成分が入らない。 y, z 成分も同様。引く順番に注意。どうにかして覚えろ。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

- ナブラ (∇) は演算子で、それだけでは意味を成さないベクトル。 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

- スカラーに付くときは gradient (グラディエント：勾配) で、スカラーを x, y, z のそれぞれで微分してベクトルにする。スカラーにしか付かないから、 \mathbf{f} やなくて、 f なんやで。

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- ベクトルに内積で付くときは divergence (ダイバージェンス：発散)。内積なので各成分を掛けて足す。答えはスカラー。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

- ベクトルに外積で付くときは rotation または curl (ローテーション、またはカール：回転)。外積なので答えはベクトルやし、 x 成分に x の文字はない。

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$