

# 流体と弾性体 演習問題

(2013 年度 得点バラマキ用)

何か質問があればメールください： (web 掲載のため削除)

1.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  を計算せよ。[4 点]

(a)  $\mathbf{A} = (5, 6, 7)$ ,  $\mathbf{B} = (2, -3, 4)$

(b)  $\mathbf{A} = (0, 2, -3)$ ,  $\mathbf{B} = (10, -10, 3)$

(c)  $\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{2}{3}\right)$ ,  $\mathbf{B} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -4\right)$

(d)  $\mathbf{A} = (3, -2, -1)$ ,  $\mathbf{B} = (1, 4, -5)$

(e)  $\mathbf{A} = (a^2, 4b, ab)$ ,  $\mathbf{B} = (2a, b, -4ab)$

2.  $\nabla f(x, y, z)$  を計算せよ。[4 点]

(a)  $f(x, y, z) = x + y + z$

(b)  $f(x, y, z) = x^5 + y^4 + z^3$

(c)  $f(x, y, z) = x^2y^2 + 2y^2z^2 + 3x^2z^2$

(d)  $f(x, y, z) = -4x^3y^2 + x^2z^3 + 2y^3 - yz^3 + 12$

3.  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,  $\nabla \times \mathbf{A}$  を計算せよ。[5 点]

(a)  $\mathbf{A} = (x^2, y^2, z^2)$

(b)  $\mathbf{A} = (x^2y^2, y^2z^2, x^2z^2)$

(c)  $\mathbf{A} = (x^2y^2z^2, y^2z^2, x^2)$

(d)  $\mathbf{A} = (3x + y^2z^3, y^2 + z^2 + 12, x^3 + yz^4)$

(e)  $\mathbf{A} = (xyz + 5y^2z, xz^2 + 3y^3 - z^3, -x^3 + 2yz^2 + 3z^3)$

4. 以下の等式を証明せよ。ただし、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  である。[(a-g) 6 点, (h-l) 8 点]

(a)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

(b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

(c)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

(d)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$  ならば、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$

(e)  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  が同一平面内にあるとき、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$

(f)  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

(g)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(h)  $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$

(i)  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$

(j)  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}$

(k)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$

(l)  $\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$

5. 以下の関数を  $x = 0$  の回りでテイラー展開せよ。[6 点]

- (a)  $e^x$
- (b)  $\sin x$
- (c)  $\cos x$
- (d)  $\log(x + 1)$
- (e)  $\sqrt{1 + x}$

6. 弦の振動

- (a) 紐の長さが 2m の単振り子がある。振動周期を求めなさい。また、紐の長さを半分にしたとき、振動周期はどのように変化するか述べなさい。[6 点]
- (b) 長さ 10 m、質量 100 g の糸が、6 kg 重の力で引っ張られている。この糸に振動を与えたとき、この振動はどのような速さで伝わるか。[7 点]
- (c) あるピアノ線を伝播する波の速さは 350 m/s である。張力が 80 kg 重のとき、このピアノ線の線密度を求めなさい。また、ピアノ線の長さを 3 倍にしたとき、波の伝播速度がどうなるか述べなさい。[8 点]

7. スケールハイト、音波

- (a) 一様重力下において、流体が静止している。
  - i. このときの連続の式、運動方程式はどうなりますか。[15 点]
  - ii. 温度は変化しないとして、圧力について解きなさい。[20 点]
- (b) 以下のものの圧力スケールハイトと音速を求めなさい。また、それぞれの流体における粒子の平均速度を計算し、音速と比較しなさい。[10 点]
  - i. 地球大気（平均分子量 30、比熱比 7/5）
  - ii. 6,000 度の太陽表面（平均分子量 1、比熱比  $\sim 1$ ）
  - iii. 100 万度の太陽コロナ（平均分子量 0.5、比熱比  $\sim 1$ ）
- (c) 水素中と酸素中での音速の比を考察しなさい。[10 点]
- (d) ヘリウムガスを吸うと高い声が出せる。その理由を定性的に説明しなさい。[10 点]
- (e) 地球上でのヒトの声は通常、空気抵抗などにより散逸する。しかし、仮に散逸が起こらないとしても、ある距離以上は伝播できない。これは、時間とともに波形が変化し、線型近似が破綻するためであるが、それはどれくらいの距離で起こるか。ヒトの声による音圧変化は 0.02 Pa とする。わかるかな？ [50 点]

8. ベルヌーイの定理

- (a) ベルヌーイの定理を用いて、霧吹の原理を説明しなさい。[10 点]
- (b) 水平に置いてある太さが一様でない細い円管の中を、粘性のない非圧縮性流体が定常的に流れている。任意の断面での圧力  $p$  と半径  $r$  との間に成り立つ関係式を求めよ。[20 点]
- (c) 野球には「カーブ」と呼ばれる投球方法があるが、なぜ軌道が曲がるのが説明しなさい。[10 点]
- (d) 同様に、「フォーク」ボールがなぜ落ちる球と呼ばれるのか説明しなさい。[10 点]

9. 水面の波

- (a) 1960 年のチリ近海で発生した地震による津波は、地震発生から 22 時間半で日本沿岸に到達し、岩手県などで多数の死者を出した。
  - i. 日本-チリ間の距離は約 17,000 km である。津波の波長は水深に比べて十分長いとして、太平洋の平均水深を見積もれ。[10 点]
  - ii. 津波の被害は沿岸部で大きく、沖に出ている漁船などにはほとんど、あるいは全く影響がない。その理由を説明せよ。[12 点]