流体と弾性体 演習問題（2017 年 12 月 11 日）

（2017 年度　得点バラマキ用）

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算をせよ。[4 点]

   (a) $\mathbf{A}=(5,\ 6,\ 7),\ \mathbf{B}=(2,\ -3,\ 4)$

   (b) $\mathbf{A}=(0,\ 2,\ -3),\ \mathbf{B}=(10,\ -10,\ 3)$

   (c) $\mathbf{A}=\left(\frac{1}{2}\,,\ 3\ ,\ \frac{2}{3}\right),\ \mathbf{B}=\left(\frac{3}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ -4\right)$

   (d) $\mathbf{A}=(3,\ -2,\ -1),\ \mathbf{B}=(1,\ 4,\ -5)$

   (e) $\mathbf{A}=(a^2,\ 4b,\ ab),\ \mathbf{B}=(2a,\ b,\ -4ab)$

2. $\nabla f(x,\ y,\ z)$ を計算せよ。[4 点]

   (a) $f(x,\ y,\ z)=x+y+z$

   (b) $f(x,\ y,\ z)=x^5+y^4+z^3$

   (c) $f(x,\ y,\ z)=x^2y^2+2y^2z^2+3x^2z^2$

   (d) $f(x,\ y,\ z)=-4x^3y^2+x^2z^3+2y^3-yz^3+12$

3. $\nabla\cdot\mathbf{A}$, $\nabla\times\mathbf{A}$ を計算せよ。[5 点]

   (a) $\mathbf{A}=(x^2,\ y^2,\ z^2)$

   (b) $\mathbf{A}=(x^2y^2,\ y^2z^2,\ x^2z^2)$

   (c) $\mathbf{A}=(x^2y^2z^2,\ y^2z^2,\ x^2)$

   (d) $\mathbf{A}=(3x+y^2z^3,\ y^2+z^2+12,\ x^3+yz^4)$

   (e) $\mathbf{A}=(xyz+5y^2z,\ xz^2+3y^3-z^3,\ -x^3+2yz^2+3z^3)$

4. 以下の等式を証明せよ。ただし、$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ である。[(a-g) 6 点, (h-l) 8 点]

   (a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$

   (b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})=-2\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

   (c) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

   (d) $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=0$ ならば、$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{C}\times\mathbf{A}$

   (e) $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}$ が同一平面内にあるとき、$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$

   (f) $\nabla\times(\nabla\phi)=0$

   (g) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$

   (h) $\nabla\times(\phi\mathbf{A})=(\nabla\phi)\times\mathbf{A}+\phi(\nabla\times\mathbf{A})$

   (i) $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\nabla\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$

   (j) $\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}-(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B}$

   (k) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}$

   (l) $\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\nabla\frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi}$

5. 以下の関数を $x=0$ の回りでテイラー展開せよ。[6 点]

   (a) e^x

(b) $\sin x$

(c) $\cos x$

(d) $\tan x$

(e) $\log(x+1)$

6. 弦の振動

 (a) 紐の長さが 2m の単振り子がある。振動周期を求めなさい。また、紐の長さを半分にしたとき、振動周期はどのように変化するか述べなさい。[7 点]

 (b) 長さ 10 m、質量 100 g の糸が、6 kg 重の力で引っ張られている。この糸に振動を与えたとき、この振動はどのような速さで伝わるか。[6 点]

 (c) あるピアノ線を伝播する波の速さは 350 m/s である。張力が 80 kg 重のとき、このピアノ線の線密度を求めなさい。また、ピアノ線の長さを 3 倍にしたとき、波の伝播速度がどうなるか述べなさい。[8 点]

7. スケールハイト、音波

 (a) 一様重力下において、流体が静止している。

  i. このときの連続の式、運動方程式はどうなりますか。[15 点]

  ii. 温度は変化しないとして、圧力について解きなさい。[20 点]

 (b) 以下のものの圧力スケールハイトと音速を求めなさい。また、それぞれの流体における粒子の平均速度 ($v_{th} = \sqrt{3k_BT/m}$) を計算し、音速と比較しなさい。[10 点]

  i. 地球大気（平均分子量 30、比熱比 7/5）

  ii. 6,000 度の太陽表面（平均分子量 1、比熱比 ~ 1）

  iii. 100 万度の太陽コロナ（平均分子量 0.5、比熱比 ~ 1）

 (c) 水素中と酸素中での音速の比を考察しなさい。[10 点]

 (d) ヘリウムガスを吸うと高い声が出せる。その理由を定性的に説明しなさい。[10 点]

 (e) 地球上でのヒトの声は通常、空気抵抗などにより散逸する。しかし、仮に散逸が起こらないとしても、ある距離以上は伝播できない。これは、時間とともに波形が変化し、線型近似が破綻するためであるが、それはどれくらいの距離で起こるか。ヒトの声による音圧変化は 0.02 Pa とする。わかるかな？ [140 点]

8. ベルヌーイの定理

 (a) 深さ 1m の大きな容器の底に小さな穴が開いている。容器を水で満たしたとき、穴から流れ出る水の速さを求めよ。[10 点]

 (b) 水平に置いてある太さが一様でない細い円管の中を、粘性のない非圧縮性流体が定常的に流れている。任意の断面での圧力 p と半径 r との間に成り立つ関係式を求めよ。[20 点]

 (c) 野球には「カーブ」と呼ばれる投球方法があるが、なぜ軌道が曲がるのが説明しなさい。[10 点]

 (d) 同様に、「フォーク」ボールがなぜ落ちる球と呼ばれるのか説明しなさい。[10 点]

9. 津波

 (a) 1960 年のチリ近海で発生した地震による津波は、地震発生から 22 時間半で日本沿岸に到達し、岩手県などで多数の死者を出した。

  i. 日本ーチリ間の距離は約 17,000 km である。津波の波長は水深に比べて十分長いとして、太平洋の平均水深を見積もれ。[10 点]

  ii. 津波の被害は沿岸部で大きく、沖に出ている漁船などにはほとんど、あるいは全く影響がない。その理由を説明せよ。[10 点]