# 流体と弾性体 演習問題（2018 年 12 月 03 日）

**（2018 年度　得点バラマキ用：全部で 500 点分くらい）**

[ルール] 1, 2(a-g), 2(h-l), 3, 4, 5(b) はそれぞれ 1 人 1 問のみ。電卓を使用してはいけない。また、1〜3, 5(b) は 2 限のプラズマのものと同じ大問を重複解答した場合、後に問いた方をゼロ点とする。

1. 基本的なベクトル演算 [10 点]

   (a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ を計算をせよ。

   i. $\mathbf{A}=(5,\ 6,\ 7),\ \mathbf{B}=(2,\ -3,\ 4)$

   ii. $\mathbf{A}=(0,\ 2,\ -3),\ \mathbf{B}=(10,\ -10,\ 3)$

   iii. $\mathbf{A}=\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 3\ ,\ \dfrac{2}{3}\right),\ \mathbf{B}=\left(\dfrac{3}{2}\ ,\ \dfrac{1}{3}\ ,\ -4\right)$

   iv. $\mathbf{A}=(3,\ -2,\ -1),\ \mathbf{B}=(1,\ 4,\ -5)$

   v. $\mathbf{A}=(a^2,\ 4b,\ ab),\ \mathbf{B}=(2a,\ b,\ -4ab)$

   (b) $\nabla f(x,\ y,\ z)$ を計算せよ。

   i. $f(x,\ y,\ z)=x+y+z$

   ii. $f(x,\ y,\ z)=x^5+y^4+z^3$

   iii. $f(x,\ y,\ z)=x^2y^2+2y^2z^2+3x^2z^2$

   iv. $f(x,\ y,\ z)=-4x^3y^2+x^2z^3+2y^3-yz^3+12$

   (c) $\nabla\cdot\mathbf{A}$, $\nabla\times\mathbf{A}$ を計算せよ。

   i. $\mathbf{A}=(x^2,\ y^2,\ z^2)$

   ii. $\mathbf{A}=(x^2y^2,\ y^2z^2,\ x^2z^2)$

   iii. $\mathbf{A}=(x^2y^2z^2,\ y^2z^2,\ x^2)$

   iv. $\mathbf{A}=(3x+y^2z^3,\ y^2+z^2+12,\ x^3+yz^4)$

   v. $\mathbf{A}=(xyz+5y^2z,\ xz^2+3y^3-z^3,\ -x^3+2yz^2+3z^3)$

2. 以下の等式を証明せよ。ただし、$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ である。[(a-g) 10 点, (h-l) 15 点]

   (a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$

   (b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})=-2\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

   (c) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

   (d) $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=0$ ならば、$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{C}\times\mathbf{A}$

   (e) $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}$ が同一平面内にあるとき、$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0$

   (f) $\nabla\times(\nabla\phi)=0$

   (g) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$

   (h) $\nabla\times(\phi\mathbf{A})=(\nabla\phi)\times\mathbf{A}+\phi(\nabla\times\mathbf{A})$

   (i) $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\nabla\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2}-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$

   (j) $\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}-(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{B}$

   (k) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}$

   (l) $\dfrac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\nabla\dfrac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi}$

3. 以下の関数を $x = 0$ の回りでテイラー展開せよ。[10 点]
   (a) $e^x$
   (b) $\sin x$
   (c) $\cos x$
   (d) $\tan x$
   (e) $\log(x+1)$
4. 弦の振動
   (a) 紐の長さが 2m の単振り子がある。振動周期を求めなさい。また、紐の長さを半分にしたとき、振動周期はどのように変化するか述べなさい。[10 点]
   (b) 長さ 10 m、質量 100 g の糸が、6 kg 重の力で引っ張られている。この糸に振動を与えたとき、この振動はどのような速さで伝わるか。[10 点]
   (c) あるピアノ線を伝播する波の速さは 350 m/s である。張力が 80 kg 重のとき、このピアノ線の線密度を求めなさい。また、ピアノ線の長さを 3 倍にしたとき、波の伝播速度がどうなるか述べなさい。[10 点]
5. スケールハイト、音波
   (a) 一様重力下において、流体が静止している。このときの連続の式、運動方程式を書きなさい。[10 点]
   (b) 以下のものの圧力スケールハイトと音速を求めなさい。また、それぞれの流体における粒子の平均速度 ($v_{th} = \sqrt{3k_B T/m}$) を計算し、音速と比較しなさい。[10 点]
      i. 地球大気（平均分子量 30、比熱比 7/5）
      ii. 6,000 度の太陽表面（平均分子量 1、比熱比 $\sim 1$）
      iii. 100 万度の太陽コロナ（平均分子量 0.5、比熱比 $\sim 1$）
   (c) 水素中と酸素中での音速の比を考察しなさい。[10 点]
   (d) ヘリウムガスを吸うと高い声が出せる。その理由を定性的に説明しなさい。[10 点]
   (e) 地球上でのヒトの声は通常、空気抵抗などにより散逸する。しかし、仮に散逸が起こらないとしても、ある距離以上は伝播できない。これは、時間とともに波形が変化し、線型近似が破綻するためであるが、それはどれくらいの距離で起こるか。ヒトの声による音圧変化は 0.02 Pa とする。［レポート］
6. ベルヌーイの定理
   (a) 深さ 1m の大きな容器の底に小さな穴が開いている。容器を水で満たしたとき、穴から流れ出る水の速さを求めよ。[10 点]
   (b) 水平に置いてある太さが一様でない細い円管の中を、粘性のない非圧縮性流体が定常的に流れている。任意の断面での圧力 $p$ と半径 $r$ との間に成り立つ関係式を求めよ。[20 点]
   (c) 野球には「カーブ」と呼ばれる投球方法があるが、なぜ軌道が曲がるのか説明しなさい。[10 点]
   (d) 同様に、「フォーク」ボールがなぜ落ちる球と呼ばれるのか説明しなさい。[10 点]
7. 津波

   1960 年のチリ近海で発生した地震による津波は、地震発生から 22 時間半で日本沿岸に到達し、岩手県などで多数の死者を出した。

   (a) 日本ーチリ間の距離は約 17,000 km である。津波の波長は水深に比べて十分長いとして、太平洋の平均水深を見積もれ。[10 点]
   (b) 津波の被害は沿岸部で大きく、沖に出ている漁船などにはほとんど、あるいは全く影響がない。その理由を説明せよ。[10 点]