

プラズマ物理 演習問題 (2017年12月11日)

(2017年度 得点バラマキ用)

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。[3点]

(a) $\mathbf{A} = (0, 2, -3)$, $\mathbf{B} = (10, -10, 3)$

(b) $\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{B} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -4\right)$

(c) $\mathbf{A} = (3, -2, -1)$, $\mathbf{B} = (1, 4, -5)$

(d) $\mathbf{A} = (a^2, 4b, ab)$, $\mathbf{B} = (2a, b, -4ab)$

2. $\nabla f(x, y, z)$ を計算せよ。[3点]

(a) $f(x, y, z) = x^5 + y^4 + z^3$

(b) $f(x, y, z) = x^2y^2 + 2y^2z^2 + 3x^2z^2$

(c) $f(x, y, z) = -4x^3y^2 + x^2z^3 + 2y^3 - yz^3 + 12$

3. $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。[4点]

(a) $\mathbf{A} = (x^2y^2, y^2z^2, x^2z^2)$

(b) $\mathbf{A} = (x^2y^2z^2, y^2z^2, x^2)$

(c) $\mathbf{A} = (3x + y^2z^3, y^2 + z^2 + 12, x^3 + yz^4)$

(d) $\mathbf{A} = (xyz + 5y^2z, xz^2 + 3y^3 - z^3, -x^3 + 2yz^2 + 3z^3)$

4. 以下の等式を証明せよ。ただし、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ である。[(a-g) 5点, (h-l) 7点]

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

(b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

(c) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

(d) $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$ ならば、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$

(e) \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} が同一平面内にあるとき、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$

(f) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(h) $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$

(i) $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$

(j) $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}$

(k) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}$

(l) $\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$

5. 以下の関数を $x = 0$ の回りでテイラー展開せよ。[5点]

(a) e^x (b) $\sin x$ (c) $\cos x$ (d) $\log(x+1)$ (e) $\sqrt{1+x}$

6. プラズマの条件 (デバイ遮蔽、平均自由行程)

(a) 1 eV のエネルギーを持つプラズマの温度は何 K か。1 eV = 1.6×10^{-12} erg である。[7点]

- (b) 以下のものについて、平均自由行程とデバイ長 λ_D 、デバイ球内の粒子数 $N_D = n_e \cdot \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3$ を計算し、プラズマの条件を満たすか調べなさい。[10 点]
- 太陽コロナ ($T = 10^6$ K, $n_e = 10^9$ cm $^{-3}$)
 - 恒星内部 ($T = 10^7$ K, $n_e = 10^{25}$ cm $^{-3}$)
 - 蛍光灯 ($T = 10^4$ K, $n_e = 10^9$ cm $^{-3}$)
 - 蝋燭の炎 ($k_B T = 0.1$ eV, $n_e = 10^8$ cm $^{-3}$)
 - 地球の電離層 ($k_B T = 0.1$ eV, $n_e = 10^6$ cm $^{-3}$)
 - 核融合炉 ($k_B T = 10^4$ eV, $n_e = 10^{15}$ cm $^{-3}$)

7. 磁場中の荷電粒子の運動 (サイクロトロン振動、ラーモア半径)

- (a) 次の条件下における荷電粒子 (陽子、電子) の運動を表す式をそれぞれ書きなさい。荷電粒子の運動による電場、磁場の変化は無視できるものとする。そして、各項が何を意味するか説明してください。[10 点]
- 電場なし、一様磁場
 - 一様電場、一様磁場
 - $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$
- (b) 以下のものについて、熱速度、サイクロトロン振動数、ラーモア半径を計算しなさい。[10 点]
- 太陽コロナ中の電子 ($B = 1$ G, $T = 10^6$ K)
 - 地球磁場中での電子 ($B = 0.5$ G, $k_B T = 10$ keV)
 - 核融合炉内の電子 ($B = 20$ kG, $k_B T = 1$ keV)

8. 流体力学

- (a) 一様重力場における完全流体の運動を表す式を書き、線型化しなさい。さらに、静水圧平衡を仮定し、温度は一定として運動方程式を p について解きなさい。[20 点]
- (b) 以下のものの圧力スケールハイトと音速を求めなさい。また、それぞれの流体における粒子の平均速度を計算し、音速と比較しなさい。[10 点]
- 地球大気 (平均分子量 30、比熱比 7/5)
 - 6,000 度の太陽表面 (平均分子量 1、比熱比 ~ 1)
 - 100 万度の太陽コロナ (平均分子量 0.5、比熱比 ~ 1)
- (c) 地球上でのヒトの声は通常、空気抵抗などにより散逸する。しかし、仮に散逸が起これないとしても、ある距離以上は伝播できない。これは、時間とともに波形が変化し、線型近似が破綻するためであるが、それはどれくらいの距離で起こるか。ヒトの声による音圧変化は 0.02 Pa とする。わかるかな? [140 点]

9. 電磁流体力学

- (a) 振動数 $f = \omega/2\pi = 100$ MHz, 10 GHz でプラズマ振動している完全電離気体 (水素) の電子数密度をそれぞれ求めなさい。[10 点]
- (b) 電磁流体力学の基礎方程式を書き、それぞれ線型化しなさい。[3 点]
- (i) 連続の式 (ii) 運動方程式 (iii) 誘導方程式 (iv) 磁荷なしの式
- (c) 以下のものについて、Alfvén 速度を求めなさい。プラズマは水素と電子から成っているとす。[10 点]
- 核融合プラズマ ($B = 20$ kG, $n = 10^{15}$ cm $^{-3}$)
 - 地球の電離層 ($B = 0.5$ G, $n = 10^6$ cm $^{-3}$)
 - 太陽コロナ ($B = 10$ G, $n_e = 10^9$ cm $^{-3}$)
- (d) 数密度 $n = 10^9$ cm $^{-3}$ 、温度 $T = 10^6$ K のプラズマ (水素) が $B = 1$ G の一様磁場中にある。
- Alfvén 波と音波の速度をそれぞれ計算しなさい。[10 点]
 - 磁気音波の最大速度と最小速度、及びその伝播方向を、速い波 [10 点]、遅い波 [10 点] それぞれについて答えなさい。