

# プラズマ物理 演習問題 (2018年12月03日)

(2018年度 得点バラマキ用: 全部で 600 点ほど)

[ルール] 1, 2(a-g), 2(h-l), 3, 4(b), 5, 6(a), 7 はそれぞれ 1 人 1 問のみ。電卓を使用してはいけない。また、1~3, 6(a) は 1 限の流体のものと同じ大問を重複解答した場合、後に問いた方をゼロ点とする。

## 1. 基本的なベクトル演算 [10 点]

(a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  を計算せよ。

i.  $\mathbf{A} = (0, 2, -3)$ ,  $\mathbf{B} = (10, -10, 3)$

ii.  $\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{2}{3}\right)$ ,  $\mathbf{B} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -4\right)$

iii.  $\mathbf{A} = (3, -2, -1)$ ,  $\mathbf{B} = (1, 4, -5)$

iv.  $\mathbf{A} = (a^2, 4b, ab)$ ,  $\mathbf{B} = (2a, b, -4ab)$

(b)  $\nabla f(x, y, z)$  を計算せよ。

i.  $f(x, y, z) = x^5 + y^4 + z^3$

ii.  $f(x, y, z) = x^2y^2 + 2y^2z^2 + 3x^2z^2$

iii.  $f(x, y, z) = -4x^3y^2 + x^2z^3 + 2y^3 - yz^3 + 12$

(c)  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,  $\nabla \times \mathbf{A}$  を計算せよ。

i.  $\mathbf{A} = (x^2y^2, y^2z^2, x^2z^2)$

ii.  $\mathbf{A} = (x^2y^2z^2, y^2z^2, x^2)$

iii.  $\mathbf{A} = (3x + y^2z^3, y^2 + z^2 + 12, x^3 + yz^4)$

iv.  $\mathbf{A} = (xyz + 5y^2z, xz^2 + 3y^3 - z^3, -x^3 + 2yz^2 + 3z^3)$

## 2. 以下の等式を証明せよ。ただし、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ である。 [(a-g) 10 点, (h-l) 15 点]

(a)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

(b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

(c)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

(d)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$  ならば、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$

(e)  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  が同一平面内にあるとき、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$

(f)  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

(g)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(h)  $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$

(i)  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$

(j)  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B}$

(k)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$

(l)  $\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$

## 3. 以下の関数を $x = 0$ の回りでテイラー展開せよ。 [10 点]

(a)  $e^x$  (b)  $\sin x$  (c)  $\cos x$  (d)  $\log(x + 1)$  (e)  $\sqrt{1 + x}$

4. プラズマの条件 (デバイ遮蔽、平均自由行程)

- (a) 1 eV のエネルギーを持つプラズマの温度は何 K か。1 eV =  $1.6 \times 10^{-12}$  erg である。[10 点]
- (b) 以下のものについて、平均自由行程とデバイ長  $\lambda_D$ 、デバイ球内の粒子数  $N_D = n_e \cdot \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3$  を計算し、プラズマの条件を満たすか調べなさい。[10 点]
- 太陽コロナ ( $T = 10^6$  K,  $n_e = 10^9$  cm $^{-3}$ )
  - 恒星内部 ( $T = 10^7$  K,  $n_e = 10^{25}$  cm $^{-3}$ )
  - 蛍光灯 ( $T = 10^4$  K,  $n_e = 10^9$  cm $^{-3}$ )
  - 蝋燭の炎 ( $k_B T = 0.1$  eV,  $n_e = 10^8$  cm $^{-3}$ )
  - 地球の電離層 ( $k_B T = 0.1$  eV,  $n_e = 10^6$  cm $^{-3}$ )
  - 核融合炉 ( $k_B T = 10^4$  eV,  $n_e = 10^{15}$  cm $^{-3}$ )

5. 磁場中の荷電粒子の運動 (サイクロトロン振動、ラーモア半径)

- (a) 次の条件下における荷電粒子 (陽子、電子) の運動を表す式をそれぞれ書きなさい。荷電粒子の運動による電場、磁場の変化は無視できるものとする。そして、各項が何を意味するか説明してください。[10 点]
- 電場なし、一様磁場
  - 一様電場、一様磁場
  - $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$ ,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$
- (b) 以下のものについて、熱速度、サイクロトロン振動数、ラーモア半径を計算しなさい。[10 点]
- 太陽コロナ中の電子 ( $B = 1$  G,  $T = 10^6$  K)
  - 地球磁場中での電子 ( $B = 0.5$  G,  $k_B T = 10$  keV)
  - 核融合炉内の電子 ( $B = 20$  kG,  $k_B T = 1$  keV)

6. 流体力学

- (a) 以下のものの圧力スケールハイトと音速を求めなさい。また、それぞれの流体における粒子の平均速度を計算し、音速と比較しなさい。[10 点]
- 地球大気 (平均分子量 30、比熱比 7/5)
  - 6,000 度の太陽表面 (平均分子量 1、比熱比  $\sim 1$ )
  - 100 万度の太陽コロナ (平均分子量 0.5、比熱比  $\sim 1$ )
- (b) 地球上でのヒトの声は通常、空気抵抗などにより散逸する。しかし、仮に散逸が起こらないとしても、ある距離以上は伝播できない。これは、時間とともに波形が変化し、線型近似が破綻するためであるが、それはどれくらいの距離で起こるか。ヒトの声による音圧変化は 0.02 Pa とする。[レポート]

7. 電磁流体力学

- (a) 振動数  $f = \omega/2\pi = 100$  MHz, 10 GHz でプラズマ振動している完全電離気体 (水素) の電子数密度をそれぞれ求めなさい。[10 点]
- (b) 電磁流体力学の基礎方程式を書き、それぞれ線型化しなさい。[10 点]
- (i) 連続の式 (ii) 運動方程式 (iii) 誘導方程式 (iv) 磁荷なしの式
- (c) 以下のものについて、Alfvén 速度を求めなさい。プラズマは水素と電子から成っているとす。[10 点]
- 核融合プラズマ ( $B = 20$  kG,  $n = 10^{15}$  cm $^{-3}$ )
  - 地球の電離層 ( $B = 0.5$  G,  $n = 10^6$  cm $^{-3}$ )
  - 太陽コロナ ( $B = 10$  G,  $n_e = 10^9$  cm $^{-3}$ )
- (d) 数密度  $n = 10^9$  cm $^{-3}$ 、温度  $T = 10^6$  K のプラズマ (水素) が  $B = 1$  G の一様磁場中にある。
- Alfvén 波と音波の速度をそれぞれ計算しなさい。[10 点]
  - 磁気音波の最大速度と最小速度、及びその伝播方向を
    - 速い波 [10 点]
    - 遅い波 [10 点]についてそれぞれ答えなさい。