

[数字] は各問題の点数。講義中の演習問題等の得点と合わせて 60 点以上で合格、60 点超分は得点を半分にして加算。100 点以上を 100 点とする。なお、この試験問題だけで 300 点以上ある。しかも、ベクトル演算だけで 60 点越えが可能。試験後に点数や答案の評価が知りたかったらメールください。ただし、2 月 10 日くらいから 1 ヶ月ほど渡米するのでお早めに、あるいは 3 月中旬以降に。(web 掲載のため削除)

注意: 持ち込みなし。自分の力だけで解きなさい。電卓の類を使用した場合は問題毎に -10 点。部分点の観点から、計算過程はできるだけ答案に残すことを勧めます。全部解くのは時間的に難しい。できる問題から解きましょう。

- ボルツマン定数  $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- 陽子質量  $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
- 地球の重力加速度  $g = 9.8 \times 10^2 \text{ cm/s}^2$

1. 次の問いに答えよ。

- (a) [1,3]  $\mathbf{A} = (3, 3, 3)$ ,  $\mathbf{B} = (0, -9, 3)$  のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  を計算せよ。
- (b) [1,3]  $\mathbf{A} = (a^2b, 2ab, -b^2)$ ,  $\mathbf{B} = (a^2, -b^2, 4ab)$  のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  を計算せよ。
- (c) [2,3,2]  $\mathbf{A} = \left(\frac{1}{4}, 4, -\frac{2}{3}\right)$ ,  $\mathbf{B} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$  のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  を計算せよ。
- (d) [3]  $f(x, y, z) = x^2y + x^2z - yz^3$  のとき、 $\nabla f(x, y, z)$  を計算せよ。
- (e) [4]  $f(x, y, z) = 3x^2yz - 2ax^3z^2 + 4xy^3 - 2yz - 2x^2 - 4y + 5$  のとき、 $\nabla f(x, y, z)$  を計算せよ。
- (f) [3,4]  $\mathbf{A} = (x^2y, y^4z, xz^3)$  のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,  $\nabla \times \mathbf{A}$  を計算せよ。
- (g) [3,6]  $\mathbf{A} = (yz + y^{-1}, xz^3, x + 2y)$  のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,  $\nabla \times \mathbf{A}$  を計算せよ。

2. 以下の等式を証明せよ。ただし、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  である。2 問までを得点に加算する。3 問以上解いた場合は、正解のうち、高得点の上位 2 問を加算する。

- (a) [4]  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- (b) [4]  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
- (c) [8]  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
- (d) [8]  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  が同一平面内にあるとき、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$
- (e) [10]  $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$
- (f) [15]  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$

3. [10]  $\frac{1}{1+x}$  を  $x = 0$  の回りでテイラー展開せよ。

4. [8+]  $\sin 1$  を計算せよ。実際の値と有効数字 1 桁正解ごとに 8 点を加算する。

5. [10]  $A = 123456789\sqrt{1234321}$  と  $B = 1234321\sqrt{123456789}$  はどちらがどれだけ大きいのか。

6. 紐の長さが 10 m の単振り子がある。
- [7] 振動周期を求めなさい。
  - [7] また、紐の長さを倍にしたとき、振動周期はどのように変化するか述べなさい。
7. [10] 長さ 100 m、質量 2 kg の糸が、5 kg 重の力で引っ張られている。この糸に振動を与えたとき、この振動はどのような速さで伝わるか。
8. 一様重力下の完全流体について。
- [10] 連続の式を書きなさい。
  - [10] 運動方程式を書きなさい。
  - [20] また、流体に摂動を加えたとして、これらの式を線型化しなさい。このとき、考えている領域はスケールハイトに比べて十分小さいとする。
  - 流体が完全に静止している状態を考える。
    - [10] このときの連続の式、運動方程式はどうなりますか。
    - [20] 温度は変化しないとして、圧力について解きなさい。
9. 地球大気（平均分子量 28.97、比熱比 7/5）における以下の物理量を計算しなさい。単位もお忘れなく。
- [10] 圧力スケールハイト ( $k_B T/mg$ )
  - [10] 音速 ( $\sqrt{\gamma k_B T/m}$ )
10. [10] ヘリウムガスを吸うと高い声が出せる。その理由を定性的に説明しなさい。
11. 円筒形の容器に流体が入っており、一定の角速度  $\Omega$  で剛体回転している。
- [45] 外力を無視するとき、流体の圧力の分布式を中心軸からの距離  $r$  の関数として求めよ。流体の密度変化は考えなくてよいとする。
  - [10] また、その渦度を求めよ。
12. [10] 野球には「カーブ」と呼ばれる投球方法があるが、なぜ軌道が曲がるのか説明しなさい。
13. 2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分に東北地方太平洋沖地震が発生した。
- [15] この地震の震源は仙台市や大船渡市から約 150 km 離れている。震源とこれらの都市間の平均水深を 1,000 m としたとき、津波の到達予測時刻は何時何分か。
  - [10] 震源から 8,600 km 離れたカリフォルニアの沿岸では翌日の午前 2 時ごろに津波が観測された。このことから、日本—アメリカ間の平均水深を見積もりなさい。
14. [10] 2 月 11 日は「建国記念の日」という祝日だが、どこの国がいつ誰によってどのように建国されたことを記念する日なのか答えなさい。ちなみに、流体力学とは何の関係もない、タダのボーナス問題。