

[数字] は各問題の点数。講義中の演習問題等の得点と合わせて 60 点以上で合格 (C)、以降 80 点 (B)、100 点 (A)、120 点 (S)。なお、この試験問題だけで 250 点以上ある。しかも、ベクトル演算だけで 60 点越えが可能。試験後に点数や答案の評価が知りたかったらメールください。(web 掲載のため削除)

注意: 持ち込みなし。自分の力だけで解きなさい。電卓の類を使用した場合は問題毎に -50 点。ネット使用を含むカンニングは授業点に関係なく総合点を 0 点とする。部分点の観点から計算過程はできるだけ答案に残すことを勧めます。全部解くのは時間的に難しい。できる問題から解きましょう。

- ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- 陽子質量 $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
- 地球の重力加速度 $g = 9.8 \times 10^2 \text{ cm/s}^2$

1. 次の問いに答えよ。

- (a) [1,3] $\mathbf{A} = (3, 4, 5)$, $\mathbf{B} = (-2, 0, -4)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。
- (b) [1,3] $\mathbf{A} = (3ab, a^2b, -a^2)$, $\mathbf{B} = (2b^2, a^2, -3ab)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。
- (c) [2,3,2] $\mathbf{A} = \left(\frac{2}{3}, -2, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{B} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 3\right)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ を計算せよ。
- (d) [3] $f(x, y, z) = x^2yz^2 + xz^3 + y^2z$ のとき、 $\nabla f(x, y, z)$ を計算せよ。
- (e) [4] $f(x, y, z) = 3x^2z^5 + 2xyz^2 + axy^3 - 2x^2z - 2y^2 - 4z - 3$ のとき、 $\nabla f(x, y, z)$ を計算せよ。
- (f) [3,4] $\mathbf{A} = (x^2, xy^2z^3, -xyz^3)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。
- (g) [3,6] $\mathbf{A} = (xz + y^{-1}, 2y^2z, x - 2y)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

2. 以下の等式を証明せよ。ただし、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ である。2 問までを得点に加算する。3 問以上解いた場合は、正解のうち、高得点の上位 2 問を加算する。

- (a) [4] $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$
- (b) [6] $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- (c) [8] $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- (d) [8] $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$ ならば、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$
- (e) [10] $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$
- (f) [15] $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$

3. [10] e^{2x} を $x = 0$ の回りでテイラー展開せよ。

4. [8+] $\sin 1$ を計算せよ。実際の値と有効数字 1 桁正解ごとに 8 点を加算する。

5. 紐の長さが 40 m の単振り子がある。長い。

- (a) [7] 振動周期を求めなさい。
- (b) [7] また、紐の長さを半分にしたとき、振動周期はどのように変化するか述べなさい。

6. [10] 長さ 100 m、質量 2 kg の糸が、5 kg 重の力で引っ張られている。この糸に振動を与えたとき、この振動はどのような速さで伝わるか。
7. [10] ある物理量 $u(x, t)$ に関する波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の A の物理的意味は何か。
8. 一様重力下の完全流体について。
- (a) [10] 連続の式、[10] 運動方程式をそれぞれ書きなさい。
- (b) [15] 流体に摂動を加えたとして、連続の式、運動方程式を線型化しなさい。このとき、考えている領域はスケールハイトに比べて十分小さいとする。
- (c) 流体が完全に静止している状態を考える。
- i. [10] このとき、連続の式、運動方程式はどうなりますか。
- ii. [20] 温度は変化しないとして、圧力について解きなさい。
9. [100] 流体力学の基礎方程式を解き、音速が $\sqrt{\gamma p / \rho}$ ($= \sqrt{\gamma k_B T / m}$) となることを示しなさい。断熱の式は $p = C \rho^\gamma$ (C は定数)。
10. 地球大気 (平均分子量 28.97、比熱比 7/5) における以下の物理量を計算しなさい。単位もお忘れなく。
- (a) [10] 圧力スケールハイト ($k_B T / mg$)
- (b) [10] 音速 ($\sqrt{\gamma k_B T / m}$)
- (c) [8] 粒子の平均速度 ($\sqrt{3 k_B T / m}$)
11. [10] 水素中と酸素中での音速の比を考察しなさい。
12. [5] 流れ場 $\boldsymbol{v} = (\alpha z, 0, 0)$ の渦度を求めよ。
13. [10] 野球には「カーブ」と呼ばれる投球方法があるが、なぜ軌道が曲がるのか。ベルヌーイの定理を使って説明しなさい。
14. 海岸に向かって打ち寄せる波が、岸に近づくにつれて、[8] 波長が短くなること、[10] 海岸線に平行になることを説明せよ。
15. [15] 2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分に東北地方太平洋沖地震が発生した。この地震の震源は仙台市や大船渡市から約 150 km 離れている。震源とこれらの都市間の平均水深を 1,000 m としたとき、津波の到達予測時刻は何時何分か。
16. [20] 昨年 10 月、衆議院議員選挙があった。日本の国政選挙は小選挙区比例代表並立制を採用している。このうち、比例代表選挙は各政党の得票数で議席を配分する方式を採る。ここで、2 つの候補政党が同方式にて 10 の議席を争う場合を考える。一方の政党の獲得議席が 1、その得票数が 100 万票の時、もう一方の政党の得票数の下限値を答えなさい。流体力学とは関係ないボーナス問題。
17. [10] 1 から 9 の間の整数のうち、この流体試験受験者のみなさんが一番選ばないであろう数字を書いてください。一番回答数の少ない数字を書いた人に 10 点。複数の数字を書いた場合は無効かつその回答者は -10 点。物理学とは関係ないボーナス問題。