

[数字] は各問題の点数。講義内外で撒いた諸々の得点と合わせて 60 点以上で合格 (C)、以降 80 点 (B)、100 点 (A)、120 点 (S)。なお、この試験問題だけで 400 点以上ある。しかも、ベクトル演算だけで 60 点獲得が可能。試験後に点数や答案の評価が知りたかったらメールください (web 掲載のため削除)。ただし、1 月 23 日~27 日はアメリカ出張のため、採点やメールへの回答はその後になるかもしれません。

注意: 持ち込みなし。自分の力だけで解くこと。電卓の類を使用した場合は問題毎に -50 点。判別が難しいので疑わしきは一律に罰します。ネット使用を含むカンニングは授業点に関係なく総合点を 0 点とします。上記の理由により、筆算などの計算過程はできるだけ答案に残してください。全部解くのは時間的に難しい。できる問題から解きましょう。

採点ルール: ベクトル計算問題は間違い 1 箇所ごとに配点の 1/3 減点。単位が必要な問題での単位間違いは配点の 1/2 減点。

- ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- 陽子質量 $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
- 地球の重力加速度 $g = 9.8 \times 10^2 \text{ cm/s}^2$

1. ベクトル演算に関する次の問いに答えよ。

(a) [3,6] $\mathbf{A} = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, -1, 0)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。

(b) [21] $\mathbf{A} = (-1, -2, -3)$, $\mathbf{B} = (-1, 11, -5)$, $\mathbf{C} = (2, -9, 8)$ のとき、

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{3}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \frac{1}{6}(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \text{ を計算せよ。}$$

(c) [10] $f = xy^2z^3 - 2x^2y^3z - 3x^3yz^2 + 4n$ のとき、 $\nabla \times (\nabla f)$ を計算せよ。

(d) [5,15] $\mathbf{A} = \left(xyz, \frac{1}{xyz}, x + y + z \right)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

2. [10] $\cos x$ を $x = 0$ の回りでテイラー展開せよ。その際、 n 番目の項を n を用いて書け。

3. [8+] 自然対数の底 e を手計算せよ。実際の値と有効数字 1 桁正解ごとに 8 点を加算する。

4. ある長さの紐が天井からぶら下げられ、12 秒周期で振り子運動している。

(a) [10] 紐の長さを求めなさい。

(b) [8] また、紐の長さを倍にできたなら、振動周期はどのように変化するか述べなさい。

5. [10] 長さ 10 m、質量 200 g の糸が、5 kg 重の力で引っ張られている。この糸に振動を与えたとき、この振動はどのような速さで伝わるか。
6. [10] ある物理量 $u(x, t)$ に関する波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の A の物理的意味は何か。
7. [100] 流体力学の基礎方程式を解き、音速が $\sqrt{\gamma p / \rho}$ ($= \sqrt{\gamma k_B T / m}$) となることを示しなさい。断熱の式は $p = C \rho^\gamma$ (C は定数)。
8. 一様重力下の完全流体について。
- (a) [10] 連続の式、[10] 運動方程式をそれぞれ書きなさい。
- (b) [10] 連続の式におけるそれぞれの項が何を意味するか答えなさい。
- (c) [15] 流体に摂動を加えたとして、連続の式、運動方程式を線型化しなさい。このとき、考えている領域はスケールハイトに比べて十分小さいとする。
- (d) 流体が完全に静止している状態を考える。
- i. [10] このとき、連続の式、運動方程式はどうなりますか。
- ii. [30] 温度は変化しないとして、圧力について解きなさい。
9. 地球大気（平均分子量 28.97、比熱比 7/5）における以下の物理量を計算しなさい。
- (a) [12] 圧力スケールハイト ($k_B T / mg$)
- (b) [12] 音速 ($\sqrt{\gamma k_B T / m}$)
- (c) [12] 粒子の平均速度 ($\sqrt{3 k_B T / m}$)
10. [10] 水素中と酸素中での音速の比を考察しなさい。
11. [10] 流れ場 $\mathbf{v} = (0, \beta z, 0)$ の渦度 ω を求めよ。
12. [10] 野球には「カーブ」と呼ばれる投球方法があるが、なぜ軌道が曲がるのか。ベルヌーイの定理を使って説明しなさい。
13. 海岸に向かって打ち寄せる波が、岸に近づくにつれて、[10] 波長が短くなること、[10] 海岸線に平行になることを説明せよ。
14. [15] 2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分に東北地方太平洋沖地震が発生した。この地震は日本だけでなく、震源から 8,600 km 離れたアメリカ西海岸にも人的被害をもたらした。太平洋の平均水深を 4,000 m としたとき、アメリカ西海岸に津波が到達するのは日本時間の何時頃か。