

[数字] は各問題の点数。講義内外で撒いた諸々の得点と合わせて 60 点以上で合格 (C)、以降 80 点 (B)、100 点 (A)、120 点 (S)。なお、この試験問題だけで 400 点以上ある。しかも、ベクトル演算だけで 60 点獲得が可能。試験後に点数や答案の評価が知りたかったらメールください (web 掲載のため削除)。

注意: 持ち込みなし。自分の力だけで解くこと。電卓の類を使用した場合は問題毎に -50 点。判別が難しいので疑わしきは一律に罰します。ネット使用を含むカンニングは授業点に関係なく総合点を 0 点とします。上記の理由により、筆算などの計算過程はできるだけ答案に残してください。全部解くのは時間的に難しい。できる問題から解きましょう。

採点ルール: ベクトル計算問題は間違い 1 箇所ごとに配点の $1/3$ 減点。単位が必要な問題での単位間違いは配点の $1/2$ 減点。

- ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K = 1.38×10^{-23} J/K
- 陽子質量 $m_p = 1.67 \times 10^{-24}$ g
- 地球の重力加速度 $g = 9.8 \times 10^2$ cm/s²

1. ベクトル演算に関する次の問いに答えよ。

(a) [3,6] $\mathbf{A} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{B} = (2, 4, 6)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。

(b) [21] $\mathbf{A} = (6, 0, 3)$, $\mathbf{B} = (-1, 0, 5)$, $\mathbf{C} = (-9, 0, -2)$ のとき、
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A})$ を計算せよ。

(c) [10] $f = x^6 y^6 z^6 + 2x^3 y^2 + 3x^2 y^3 + 4yz^4 + 6$ のとき、 ∇f を計算せよ。

(d) [5,15] $\mathbf{A} = \left(xyz, \frac{1}{xyz}, x + y + z \right)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

2. [10] $\log(x+1)$ を $x=0$ の回りでテイラー展開せよ。その際、 n 番目の項を n を用いて書け。

3. [8+] 自然対数の底 e を手計算せよ。実際の値と有効数字 1 桁正解ごとに 8 点を加算する。

4. [10] $A = 123456789\sqrt{1234321}$ と $B = 1234321\sqrt{123456789}$ はどちらがどれだけ大きいか。

5. 紐の長さが 40 m の単振り子がある。長い。

(a) [10] 振動周期を求めなさい。

(b) [8] また、紐の長さを半分にしたとき、振動周期はどのように変化するか述べなさい。

6. [10] 長さ 100 m、質量 2 kg の糸が、5 kg 重の力で引っ張られている。この糸に振動を与えたとき、この振動はどのような速さで伝わるか。
7. [10] ある物理量 $u(x, t)$ に関する波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の A の物理的意味は何か。
8. [100] 流体力学の基礎方程式を解き、音速が $\sqrt{\gamma p / \rho}$ ($= \sqrt{\gamma k_B T / m}$) となることを示しなさい。断熱の式は $p = C \rho^\gamma$ (C は定数)。
9. 一様重力下の完全流体について。
- [10] 連続の式、[10] 運動方程式をそれぞれ書きなさい。
 - [10] 連続の式におけるそれぞれの項が何を意味するか答えなさい。
 - [15] 流体に摂動を加えたとして、連続の式、運動方程式を線型化しなさい。このとき、考えている領域はスケールハイトに比べて十分小さいとする。
 - 流体が完全に静止している状態を考える。
 - [10] このとき、連続の式、運動方程式はどうなりますか。
 - [30] 温度は変化しないとして、圧力について解きなさい。
10. 地球大気（平均分子量 28.97、比熱比 7/5）における以下の物理量を計算しなさい。
- [12] 圧力スケールハイト ($k_B T / mg$)
 - [12] 音速 ($\sqrt{\gamma k_B T / m}$)
 - [12] 粒子の平均速度 ($\sqrt{3 k_B T / m}$)
11. [10] ヘリウムガスを吸うと高い声が出せる。その理由を定性的に説明しなさい。
12. [10] 流れ場 $\mathbf{v} = (\alpha z, 0, 0)$ の渦度を求めよ。
13. [10] 野球には「カーブ」と呼ばれる投球方法があるが、なぜ軌道が曲がるのか。ベルヌーイの定理を使って説明しなさい。
14. 海岸に向かって打ち寄せる波が、岸に近づくにつれて、[10] 波長が短くなること、[10] 海岸線に平行になることを説明せよ。
15. [15] 2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分に東北地方太平洋沖地震が発生した。この地震の震源は仙台市や大船渡市から約 150 km 離れている。震源とこれらの都市間の平均水深を 1,000 m としたとき、津波の到達予測時刻は何時何分か。
16. [20] 昨年 7 月、参議院議員選挙があった。選び方として選挙区制と比例代表制の 2 つがあるが、比例代表制は各政党の得票数で議席を配分する方式を採用。ここで、2 つの候補政党が比例代表制にて 10 の議席を争う場合を考える。一方の政党の獲得議席が 1、その得票数が 100 万票の時、もう一方の政党の得票数の下限値を答えなさい。流体力学とは関係ないボーナス問題。