

[数字] は各問題の点数。講義中の演習問題等の得点と合わせて 60 点以上で合格、60 点超分は得点を半分にして加算。100 点以上を 100 点とする。なお、この試験問題だけで 250 点以上ある。しかも、ベクトル演算だけで 60 点越えが可能。試験後に点数や答案の評価が知りたかったらメールください。ただし、2 月 10 日くらいから 1 ヶ月ほど渡米するのでお早めに、あるいは 3 月中旬以降に。(web 掲載のため削除)

注意: 持ち込みなし。自分の力だけで解きなさい。電卓の類を使用した場合は問題毎に -10 点。部分点の観点から計算過程はできるだけ答案に残すことを勧めます。全部解くのは時間的に難しい。できる問題から解きましょう。

- ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K
- 陽子質量 $m_p = 1.67 \times 10^{-24}$ g
- 電子質量 $m_e = 9.11 \times 10^{-28}$ g
- 素電荷 $e = 4.8 \times 10^{-10}$ esu
- 光速 $c = 3.0 \times 10^{10}$ cm/s

1. 次の問いに答えよ。

- (a) [1,3] $\mathbf{A} = (2, 5, 7)$, $\mathbf{B} = (-10, 2, 5)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。
- (b) [1,3] $\mathbf{A} = (a^3b^3, 3ab, 4b^3)$, $\mathbf{B} = (ab, -3b^2, a^4b^2)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。
- (c) [2,3,2] $\mathbf{A} = \left(\frac{1}{3}, 3, \frac{3}{4}\right)$, $\mathbf{B} = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, -1\right)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ を計算せよ。
- (d) [3] $f(x, y, z) = x^3 + 4x^4 + y^3 + x^2z^2$ のとき、 $\nabla f(x, y, z)$ を計算せよ。
- (e) [4] $f(x, y, z) = 6axy^3 + 3a^3y + 4yz^3 + 3b$ のとき、 $\nabla f(x, y, z)$ を計算せよ。
- (f) [3,4] $\mathbf{A} = (2xz^3, -3x^5yz, x^3z^5)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。
- (g) [3,6] $\mathbf{A} = (xz, x^{-1}y^3, 4x^3yz)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

2. 以下の等式を証明せよ。ただし、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ である。2 問までを得点に加算する。3 問以上解いた場合は、正解のうち、高得点の上位 2 問を加算する。

- (a) [4] $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$
- (b) [4] $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2$
- (c) [6] $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$ ならば、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$
- (d) [8] $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- (e) [10] $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$
- (f) [15] $\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$

3. [10] 1 eV のエネルギーを持つプラズマの温度は何 K か。1 eV = 1.6×10^{-12} erg である。

4. [10] e は自然対数である。 e^{275} は何桁の数字か答えなさい。 $\log_{10} e = 0.434$ である。

5. [10] $A = 92250305371649\sqrt{10280284}\sin 10^{-8}$ と $B = 5.21 \times 10^{10} \times \sqrt{5}\cos 10^{-8}$ はどちらがどれだけ大きいかわか。

6. 電場のない一様磁場中にある荷電粒子（電子）の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m_e \mathbf{v}) = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

と表される。

(a) [10] $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とするとき、運動方程式を x, y, z の 3 成分に書き下しなさい。

(b) [20] この式を解き、電子がサイクロトロン振動 ($\omega_c = eB/m_e c$) することを示しなさい。

7. [60] 流体力学の基礎方程式を解き、音速が $\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ ($= \sqrt{\gamma k_B T/m}$) となることを示しなさい。断熱の式は $p = C\rho^\gamma$ (C は定数)。

8. 太陽コロナ (磁場強度 10 G, 数密度 10^9 cm^{-3} , 温度 10^6 K , 平均分子量 0.5, 比熱比 ~ 1 , 重力加速度 $2.7 \times 10^4 \text{ cm/s}^2$) について、以下の物理量を計算しなさい。なお、主な構成粒子は陽子と電子である。単位もお忘れなく。

(a) [6] デバイ長 ($\lambda_D = \sqrt{k_B T/4\pi e^2 n_e}$)

(b) [6] デバイ球内の粒子数 ($N_D = n_e \cdot \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3$)

(c) [6] 電子の熱速度 ($v_{th} = \sqrt{3k_B T/m_e}$)

(d) [6] 電子のサイクロトロン振動数 ($\omega_c = eB/m_e c$)

(e) [6] 電子のラーモア半径 ($r_L \sim v_{th}/\omega_c$)

(f) [6] 圧力スケールハイト ($H = k_B T/mg$)

(g) [6] 音速 ($c_s = \sqrt{\gamma k_B T/m}$)

(h) [6] Alfvén 速度 ($v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$)

9. 次の電磁流体力学の基礎方程式を線型化しなさい。(摂動を除き、密度・圧力・磁場は空間的に一様、流体は静止しているとする)

(a) [8] 連続の式: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$

(b) [8] 運動方程式: $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$

(c) [8] 誘導方程式: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

10. [15] 可視光で見る太陽の輪郭は綺麗な円形をしているが、X 線で見ると外側に大きく広がっている。その理由を簡単に説明しなさい。

11. [10] Alfvén 波とはどのような性質の波か述べなさい。

12. [20] 代表的な 3 つの電磁流体波 (Alfvén 波、速い波、遅い波) について、磁場の方向に対する位相速度の違いを述べなさい。図を使ってもよい。