

[数字] は各問題の点数。講義中の演習問題等の得点と合わせて 60 点以上で合格 (C)、以降 80 点 (B)、100 点 (A)、120 点 (S)。なお、この試験問題だけで 250 点以上ある。しかも、ベクトル演算だけで 60 点越えが可能。試験後に点数や答案の評価が知りたかったらメールください。(web 掲載のため削除)

注意: 持ち込みなし。自分の力だけで解きなさい。電卓の類を使用した場合は問題毎に -50 点。ネット使用を含むカンニングは授業点に関係なく総合点を 0 点とする。部分点の観点から計算過程はできるだけ答案に残すことを勧めます。全部解くのは時間的に難しい。できる問題から解きましょう。

- ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K
- 陽子質量 $m_p = 1.67 \times 10^{-24}$ g
- 電子質量 $m_e = 9.11 \times 10^{-28}$ g
- 素電荷 $e = 4.8 \times 10^{-10}$ esu (cgs gauss 単位系)
- 光速 $c = 3.0 \times 10^{10}$ cm/s

1. 次の問いに答えよ。

- (a) [1,3] $\mathbf{A} = (5, 7, 11)$, $\mathbf{B} = (-2, 3, -4)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。
- (b) [1,3] $\mathbf{A} = (a^4b^3, 3ab, 2a^3)$, $\mathbf{B} = (2a^2b, -3b^2, a^3b^2)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。
- (c) [2,3,2] $\mathbf{A} = \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$, $\mathbf{B} = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -2\right)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ を計算せよ。
- (d) [3] $f(x, y, z) = xz^2 + y^3 + z^4 + y^5z^6 + 7$ のとき、 $\nabla f(x, y, z)$ を計算せよ。
- (e) [4] $f(x, y, z) = 2mx^3y^3 + 4xz^4 + 2n^2z + 3n$ のとき、 $\nabla f(x, y, z)$ を計算せよ。
- (f) [3,4] $\mathbf{A} = (5x^2z^3, -3x^3yz, xyz^4)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。
- (g) [3,6] $\mathbf{A} = (x^2y^3z^4, x^{-1}y^3, 2x^4yz)$ のとき、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

2. 以下の等式を証明せよ。ただし、 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ である。2 問までを得点に加算する。3 問以上解いた場合は、正解のうち、高得点の上位 2 問を加算する。

- (a) [4] $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
- (b) [6] $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$
- (c) [6] $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$
- (d) [8] \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} が同一平面内にあるとき、 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$
- (e) [10] $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$
- (f) [15] $\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}$

3. [60] 流体力学の基礎方程式を解き、音速が $\sqrt{\gamma p/\rho}$ ($= \sqrt{\gamma k_B T/m}$) となることを示しなさい。断熱の式は $p = C\rho^\gamma$ (C は定数)。

4. 電場のない一様磁場中にある荷電粒子（電子）の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m_e \mathbf{v}) = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

と表される。

- (a) [10] $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とするとき、運動方程式を x, y, z の 3 成分に書き下しなさい。
 (b) [20] この式を解き、電子がサイクロトロン振動 ($\omega_c = eB/m_e c$) することを示しなさい。

5. 太陽コロナ (磁場強度 10 G, 数密度 10^9 cm^{-3} , 温度 10^6 K , 平均分子量 0.5, 比熱比 ~ 1 , 重力加速度 $2.7 \times 10^4 \text{ cm/s}^2$) について、以下の物理量を計算しなさい。なお、主な構成粒子は陽子と電子である。単位もお忘れなく。

- (a) [7] 平均自由行程 ($l = n_e^{-1}(k_B T/e^2)^2$)
 (b) [7] デバイ長 ($\lambda_D = \sqrt{k_B T/4\pi e^2 n_e}$)
 (c) [7] デバイ球内の粒子数 ($N_D = n_e \cdot \frac{4}{3}\pi \lambda_D^3$)
 (d) [7] 電子の熱速度 ($v_{th} = \sqrt{3k_B T/m_e}$)
 (e) [7] 電子のサイクロトロン振動数 ($\omega_c = eB/m_e c$)
 (f) [7] 電子のラーモア半径 ($r_L \sim v_{th}/\omega_c$)
 (g) [7] 圧力スケールハイト ($H = k_B T/mg$)
 (h) [7] 音速 ($c_s = \sqrt{\gamma k_B T/m}$)
 (i) [7] Alfvén 速度 ($v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$)

6. 次の電磁流体力学の基礎方程式を線型化しなさい。(摂動を除き、密度・圧力・磁場は空間的に一様とする)

- (a) [8] 連続の式: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
 (b) [8] 運動方程式: $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$
 (c) [8] 誘導方程式: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

7. [10] エネルギーの単位 erg は cm, g, s で組み立てるとどのようになるか。(cgs 単位系で次元解析)

8. [10] 1 eV のエネルギーを持つプラズマの温度は何 K か。1 eV = 1.6×10^{-12} erg である。

9. [10] e は自然対数である。 e^{275} は何桁の数字か答えなさい。 $\log_{10} e = 0.434$ である。

10. [10] Alfvén 波とはどのような性質の波か述べなさい。

11. [20] 代表的な 3 つの電磁流体波 (Alfvén 波、速い波、遅い波) について、磁場の方向に対する位相速度の違いを述べなさい。図を使ってもよい。

12. [20] 昨年 10 月、衆議院議員選挙があった。日本の国政選挙は小選挙区比例代表並立制を採用している。このうち、比例代表選挙は各政党の得票数で議席を配分する方式を採る。ここで、2 つの候補政党が同方式にて 10 の議席を争う場合を考える。一方の政党の獲得議席が 1、その得票数が 100 万票の時、もう一方の政党の得票数の上限値を答えなさい。プラズマ物理とは関係ないボーナス問題。

13. [10] 1 から 9 の間の整数のうち、このプラズマ物理試験受験者のみなさんが一番選ばないであろう数字を書いてください。一番回答数の少ない数字を書いた人に 10 点。複数の数字を書いた場合は無効かつその回答者は -10 点。物理学とは関係ないボーナス問題。