

[数字] は各問題の点数。講義内外で撒いた諸々の得点と合わせて 60 点以上で合格 (C)、以降 80 点 (B)、100 点 (A)、120 点 (S)。なお、この試験問題だけで 300 点以上ある。しかも、ベクトル演算だけで 60 点獲得が可能。試験後に点数や答案の評価が知りたかったらメールください (web 掲載のため削除)。ただし、1 月 23 日~27 日はアメリカ出張のため、採点やメールへの回答はその後になるかもしれません。

注意: 持ち込みなし。自分の力だけで解くこと。電卓の類を使用した場合は問題毎に -50 点。判別が難しいので疑わしきは一律に罰します。ネット使用を含むカンニングは授業点に関係なく総合点を 0 点とします。上記の理由により、筆算などの計算過程はできるだけ答案に残してください。全部解くのは時間的に難しい。できる問題から解きましょう。

採点ルール: ベクトル計算問題は間違い 1 箇所ごとに配点の 1/3 減点。単位が必要な問題での単位間違いは配点の 1/2 減点。

- ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- 陽子質量 $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
- 電子質量 $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$
- 素電荷 $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu (cgs gauss 単位系)} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C (MKS 単位系)}$
- 光速 $c = 3.0 \times 10^{10} \text{ cm/s}$

1. ベクトル演算に関する次の問いに答えよ。

(a) [15] $\mathbf{A} = \left(5, \frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, $\mathbf{B} = \left(\frac{1}{3}, 4, -\frac{5}{2} \right)$, $\mathbf{C} = (-2, -24, 15)$ のとき、

$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ を計算せよ。

(b) [24] $\mathbf{A} = (-x^4yz^2, 2x^2y^2z + z^5, 2xy^4z)$, $\mathbf{B} = (-6y^3, 2x^2y^2z - z^5, -5x^3z)$,
 $\mathbf{C} = (-2x^{-2}yz^{-6}, 2x^{-2}y^{-2}z^{-1} - z^{-5}, -x^{-3}y^{-6}z^3)$ のとき、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ を計算せよ。

(c) [21] $\mathbf{A} = (8y^3z^2 + 6z^5, 5x^3y^4z^3, 12x^2y - 5y^5)$, $\mathbf{B} = (-3xyz, 2x^4y^5z + 4x^2y, 10y^3z^4)$,
 $\phi = -3x^7yz + 8xz$ のとき、 $\nabla \cdot \{\mathbf{A} + \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \phi)\}$ を計算せよ。

2. 電場のない一様磁場中にある荷電粒子 (電子) の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m_e \mathbf{v}) = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

と表される。

(a) [10] $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とするとき、運動方程式を x, y, z の 3 成分に書き下しなさい。

(b) [20] この式を解き、電子がサイクロトロン振動 ($\omega_c = eB/m_e c$) することを示しなさい。

3. [60] 流体力学の基礎方程式を解き、音速が $\sqrt{\gamma p/\rho}$ ($= \sqrt{\gamma k_B T/m}$) となることを示しなさい。断熱の式は $p = C\rho^\gamma$ (C は定数)。(ただし、1 限の流体力学の試験でこれと同じ問題を問いた場合、プラズマ物理のこの問題の配点を半分にする)
4. 太陽コロナ (磁場強度 10 G, 数密度 10^9 cm^{-3} , 温度 10^6 K , 平均分子量 0.5, 比熱比 ~ 1 , 重力加速度 $2.7 \times 10^4 \text{ cm/s}^2$) について、以下の物理量を計算しなさい。なお、主な構成粒子は陽子と電子である。
- [8] 平均自由行程 ($l = n_e^{-1}(k_B T/e^2)^2$)
 - [8] デバイ長 ($\lambda_D = \sqrt{k_B T/4\pi e^2 n_e}$)
 - [8] 電子の熱速度 ($v_{th} = \sqrt{3k_B T/m_e}$)
 - [8] 電子のサイクロトロン振動数 ($\omega_c = eB/m_e c$)
 - [8] 電子のラーモア半径 ($r_L \sim v_{th}/\omega_c$)
 - [8] 圧力スケールハイト ($H = k_B T/mg$)
 - [8] プラズマ周波数 ($\omega = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m_e}$)
 - [8] 音速 ($c_s = \sqrt{\gamma k_B T/m}$)
 - [8] Alfvén 速度 ($v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$)
5. 次の電磁流体力学の基礎方程式を線型化しなさい。(摂動を除き、密度・圧力・磁場は空間的に一様とする)
- [10] 連続の式: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
 - [10] 運動方程式: $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$
 - [10] 誘導方程式: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$
6. [10] 13.6 eV のエネルギーを持つプラズマの温度は何 K か。1 eV = 1.6×10^{-12} erg である。
7. [10] e は自然対数である。 e^{123} は何桁の数字か答えなさい。 $\log_{10} e = 0.434$ である。
8. [10] Alfvén 波とはどのような性質の波か述べなさい。
9. [15] デバイ遮蔽について説明しなさい。
10. [20] 代表的な 3 つの電磁流体波 (Alfvén 波、速い波、遅い波) について、磁場の方向に対する位相速度の違いを述べなさい。図を使ってもよい。
11. [20] ここにサイコロが 38 個ある。内訳は、4 面体が 3 つ、6 面体が 22 個、8 面体が 1 つ、10 面体 (面に書かれた数字は 0~9) が 3 つ、12 面体が 3 つ、20 面体が 5 つ、30 面体が 1 つである。試験中にこれらを全て振るので、出た目の数が多い数字の上位 1~3 位を答えよ。順位と数字が 1 つ一致すれば 5 点、2 つで 10 点、3 つ全てで 20 点。順序違いで 3 つの数字全てを答えていた場合は 10 点。同じ目の個数が複数あった場合は、数字の大きい目を上位とする。プラズマとは関係ないボーナス問題。
(例: 正解 4-8-12 の場合、回答 1-8-2 \rightarrow 5 点、回答 1-8-12 \rightarrow 10 点、回答 2-4-8 \rightarrow 0 点、12-4-8 \rightarrow 10 点)