

[数字] は各問題の点数。講義内外で撒いた諸々の得点と合わせて 60 点以上で合格 (C)、以降 80 点 (B)、100 点 (A)、120 点 (S)。なお、この試験問題だけで 300 点以上ある。しかも、ベクトル演算だけで 60 点獲得が可能。試験後に点数や答案の評価が知りたかったらメールください (web 掲載のため削除)。

注意: 持ち込みなし。自分の力だけで解くこと。電卓の類を使用した場合は問題毎に -50 点。判別が難しいので疑わしきは一律に罰します。ネット使用を含むカンニングは授業点に関係なく総合点を 0 点とします。上記の理由により、筆算などの計算過程はできるだけ答案に残してください。全部解くのは時間的に難しい。できる問題から解きましょう。

採点ルール: ベクトル計算問題は間違い 1 箇所ごとに配点の 1/3 減点。単位が必要な問題での単位間違いは配点の 1/2 減点。

- ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- 陽子質量 $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$
- 電子質量 $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$
- 素電荷 $e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ esu (cgs gauss 単位系)} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C (MKS 単位系)}$
- 光速 $c = 3.0 \times 10^{10} \text{ cm/s}$

1. ベクトル演算に関する次の問いに答えよ。

(a) [3,6] $\mathbf{A} = (b, a + b, -2a)$, $\mathbf{B} = (a - b, -b, a + b)$ のとき、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を計算せよ。

(b) [15] $\mathbf{A} = (x^4 + y^4 + z^4, x^3 + y^3 + z^3, x^2 + y^2 + z^2)$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{C} = \nabla \times \mathbf{B}$ のとき、 $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$ を計算せよ。

(c) 次の 3 問のうちから 2 問選んで解答せよ。3 問解いた場合は一番点数の低いものをゼロ点とする。

i. [12] $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を証明せよ。

ii. [12] $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ を証明せよ。

iii. [24] $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ を証明せよ。

2. 電場のない一様磁場中にある荷電粒子 (電子) の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m_e \mathbf{v}) = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

と表される。

(a) [10] $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とするとき、運動方程式を x, y, z の 3 成分に書き下しなさい。

(b) [20] この式を解き、電子がサイクロトロン振動 ($\omega_c = eB/m_e c$) することを示しなさい。

3. [60] 流体力学の基礎方程式を解き、音速が $\sqrt{\gamma p/\rho}$ ($= \sqrt{\gamma k_B T/m}$) となることを示しなさい。断熱の式は $p = C\rho^\gamma$ (C は定数)。(ただし、1 限の流体力学の試験でこれと同じ問題を問いた場合、プラズマ物理のこの問題の配点を半分にする)
4. 太陽コロナ (磁場強度 10 G, 数密度 10^9 cm^{-3} , 温度 10^6 K , 平均分子量 0.5, 比熱比 ~ 1 , 重力加速度 $2.7 \times 10^4 \text{ cm/s}^2$) について、以下の物理量を計算しなさい。なお、主な構成粒子は陽子と電子、表記は全て cgs gauss 単位系である。
- [8] 平均自由行程 ($l = n_e^{-1}(k_B T/e^2)^2$)
 - [8] デバイ長 ($\lambda_D = \sqrt{k_B T/4\pi e^2 n_e}$)
 - [8] 電子の熱速度 ($v_{th} = \sqrt{3k_B T/m_e}$)
 - [8] 電子のサイクロトロン振動数 ($\omega_c = eB/m_e c$)
 - [8] 電子のラーモア半径 ($r_L \sim v_{th}/\omega_c$)
 - [8] 圧力スケールハイト ($H = k_B T/mg$)
 - [8] プラズマ周波数 ($\omega = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m_e}$)
 - [8] 音速 ($c_s = \sqrt{\gamma k_B T/m}$)
 - [8] アルヴェン速度 ($v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$)
5. 次の電磁流体力学の基礎方程式を線型化しなさい。(摂動を除き、密度・圧力・磁場は空間的に一様とする)
- [8] 連続の式: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
 - [8] 運動方程式: $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$
 - [8] 誘導方程式: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$
6. [10] 1000 万度のプラズマは何 keV 相当のエネルギーを持つか。1 eV = 1.6×10^{-12} erg である。
7. [10] エネルギーの単位 erg を cgs 単位系で次元解析しなさい。
8. [10] e は自然対数である。 e^{275} は何桁の数字か答えなさい。 $\log_{10} e = 0.434$ である。
9. [10] アルヴェン波とはどのような性質の波か述べなさい。
10. [20] 代表的な 3 つの電磁流体波 (アルヴェン波、速い波、遅い波) について、磁場の方向に対する位相速度の違いを述べなさい。図を使ってもよい。
11. [20] 昨年 7 月、参議院議員選挙があった。選び方として選挙区制と比例代表制の 2 つがあるが、比例代表制は各政党の得票数で議席を配分する方式を採用。ここで、2 つの候補政党が比例代表制にて 10 の議席を争う場合を考える。一方の政党の獲得議席が 1、その得票数が 100 万票の時、もう一方の政党の得票数の上限値を答えなさい。プラズマ物理とは関係ないボーナス問題。